



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél (1) 39.63.55.11

Rapports de Recherche

N° 734

**CONTINUE ET  
DIFFERENTIALITE D'ELEMENTS  
PROPRES : APPLICATION A  
L'OPTIMISATION DE  
STRUCTURES**

**Bernard ROUSSELET  
Denise CHENAIS**

**OCTOBRE 1987**

CONTINUITE ET DIFFERENTIALITE D'ELEMENTS PROPRES :

Application à l'optimisation de structures

CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY OF EIGENELEMENTS :

Application to structural optimization

Bernard ROUSSELET

Département de Mathématiques

Université de Nice

06034 NICE Cedex, France

et

INRIA

Domaine de Voluceau

B.P. 105 - Rocquencourt

78153 Le Chesnay Cedex, France

Denise CHENAIS

Département de Mathématiques

Université de Nice

06034 NICE Cedex, France

Soumis pour publication dans Applied Mathematics and Optimisation

## Résumé

Habituellement, on peut calculer la charge critique de flambement d'une structure à l'aide d'un problème de valeurs propres : c'est la valeur propre de plus petite valeur absolue.

Quand on optimise une structure avec une contrainte sur la charge critique, une valeur propre multiple peut apparaître. On démontre des résultats de continuité et de différentiabilité des éléments propres par rapport à ces variables de conception en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres. On illustre ces résultats avec un problème classique : le flambement d'une poutre. L'application au flambement d'une arche est présentée dans un autre article.

## Abstract

Usually, the buckling load of a structure may be computed with an eigenvalue problem : it is the eigenvalue of smallest absolute value.

In optimizing structures with constraint on buckling load, repeated eigenvalues are likely occuring. We prove continuity and differentiability results of eigenelements with respect to design variables using the variational characterisation of eigenvalues. We illustrate these results with a classical problem : buckling of a beam. Application to the arch buckling is presented in an other article.



## 1. INTRODUCTION

La motivation de cet article se trouve dans des problèmes d'optimisation de structures qui font intervenir la charge critique de flambement eulérien. Dans de nombreuses situations, la valeur critique de flambement apparaît comme le nombre  $\lambda \in \mathbb{R}$  de plus petite valeur absolue tel que :

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in V, y \neq 0, \forall z \in V \ a(y,z) = \lambda b(y,z) \\ \text{où } V \text{ est un espace de Hilbert} \\ a \text{ une forme bilinéaire continue, symétrique, coercitive sur } V \\ b \text{ une forme bilinéaire continue symétrique sur } V, \text{ ayant une} \\ \text{propriété de compacité.} \end{array} \right.$$

Notons que la forme  $b$  n'est pas nécessairement définie positive.

Si la structure dépend d'un paramètre  $\phi$  (par exemple l'épaisseur d'une poutre, ou la forme de la surface moyenne d'une arche ou d'une coque), les formes  $a$  et  $b$  dépendent du paramètre  $\phi$ , et la valeur propre généralisée  $\lambda$  solution de (1.1) ainsi que le vecteur propre associé  $y$  en dépendent implicitement. Pour optimiser la structure du point de vue du flambement par rapport à la variable de conception  $\phi$ , on s'intéresse à la différentiabilité de  $\lambda$  par rapport à  $\phi$ .

Il est maintenant reconnu que dans ce type de problème d'optimisation, à l'optimum, on peut rencontrer des valeurs propres  $\lambda$  multiples (Masur (1979) [12], Olhoff-Rasmussen (1977) [19], pour les premières publications sur ce point). Dans un tel cas, la différentiabilité est plus difficile à étudier que dans le cas d'une équation statique.

Dans Haug-Rousselet (1980) [7], plusieurs situations de vibrations ou de flambement de structures entrant dans ce cadre ont été étudiées. Dans cet article avaient été démontrées la continuité et la différentiabilité directionnelle de  $\lambda$  par rapport à  $\phi$ . Ce résultat a ensuite été étendu dans Rousselet-Haug (1982) [18] et Rousselet (1983) [17] au cas où la variable de conception est la forme du domaine occupé par la structure, en suivant les techniques indiquées dans Rousselet (1976) [14] (voir aussi Rousselet (1978) [15]). Dans ce problème, on

étudiait un problème de valeurs propres non auto-adjoint, issu de la physique nucléaire. Le résultat de continuité et de dérivabilité directionnelle se déduisait de résultats généraux de théorie des perturbations tirés de Kato (1966) [10], adaptés à cet exemple. L'idée de base était de transformer le problème

$$\begin{aligned} & Ay = \lambda By \\ \text{en} \quad & A^{-1}By = 1/\lambda y, \end{aligned}$$

puis de se ramener à un problème en dimension finie en utilisant l'intégrale de Dunford.

Cette technique de démonstration a permis d'obtenir les résultats de continuité et différentiabilité directionnelle pour divers exemples de structures, cette technique a l'inconvénient de transformer le problème initialement autoadjoint en un problème de valeurs propres pour l'opérateur non autoadjoint  $A^{-1}B$ , où  $A$  et  $B$  sont les opérateurs autoadjoints associés aux formes  $a$  et  $b$ . L'étude de la dépendance des valeurs propres par rapport aux variables de conception doit se faire en oubliant le caractère autoadjoint du problème initial.

Pour ce cas, nous allons présenter ici une démonstration utilisant directement le caractère autoadjoint du problème. Elle repose sur la caractérisation de Courant-Fischer des valeurs propres ; elle s'inspire d'une démonstration de dérivée directionnelle de :

$$x \rightarrow F(x) = \sup_{t \in [0, T]} G(x(t), t)$$

indiquée dans Girsanov (1972) [6], ou Ioffe-Tihomirov (1979) [8] par exemple. Cette technique a été utilisée dans le cadre de l'optimisation de domaines dans Rousselet (1982) [16].

Dans cet article nous étudions la différentiabilité des éléments propres du problème autoadjoint (1.1) sous sa forme abstraite. Pour illustrer le résultat, nous l'appliquons au cas du flambement d'une poutre. Les autres exemples indiqués dans Hang-Rousselet (1980) [7] pourraient se traiter de la même façon. Dans Chenais-Rousselet (à paraître (1987) [2]) on développe l'exemple beaucoup plus compliqué de la différentiabilité de la charge critique de flambement eulérien d'une arche, par rapport à sa surface moyenne.

Dans le paragraphe 2, on présente les équations de flambement d'une poutre, puis le problème abstrait correspondant. On donne une description du spectre du problème.

Dans le paragraphe 3, on étudie la différentiabilité des opérateurs impliqués dans le problème par rapport au paramètre de conception  $\phi$ .

Dans le paragraphe 4, on étudie la différentiabilité des éléments propres d'un opérateur compact autoadjoint abstrait.

Dans le paragraphe 5, on utilise les résultats du paragraphe 4 pour obtenir les résultats correspondants pour le problème (1.1).

Enfin dans le paragraphe 6, on applique les résultats précédents à l'exemple du flambement de poutre.

Dans le problème (1.1), les formes  $a$  et  $b$  dépendent explicitement de  $\phi$ , tandis que  $\lambda$  et  $y$  en dépendent implicitement ; nous aurions donc dû écrire :

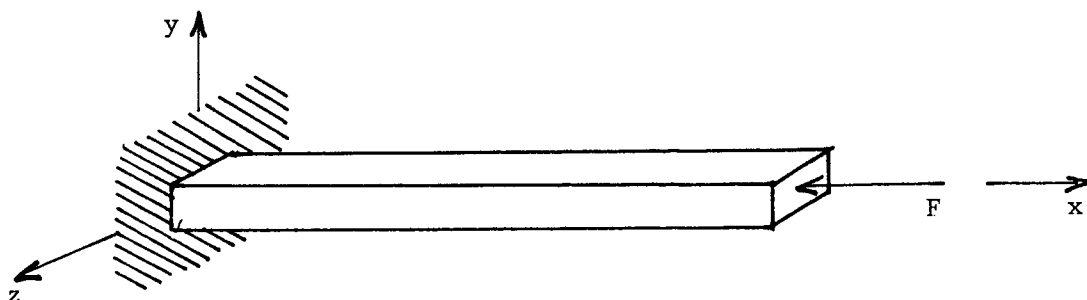
$$(1.1') \quad a(\phi; y(\phi), z) = \lambda(\phi) \quad b(\phi; y(\phi), z)$$

Pour alléger les notations, dans la suite, lorsque  $\phi$  est fixé, on omettra souvent de l'écrire. De même la dérivée directionnelle d'une fonction  $\phi \rightarrow f(\phi)$  sera souvent notée  $f'$  au lieu de  $f'(\phi, \psi)$ .

## 2. DONNEES DU PROBLEME - GENERALITES

Nous commençons par donner les équations du flambement d'une poutre. Cet exemple servira à illustrer le problème abstrait traité par la suite.

### 2.1. Equations du flambement d'une poutre



Considérons une poutre horizontale encastree à l'extrémité gauche ( $x = 0$ ) dont l'extrémité droite ( $x = 1$ ) est libre et soumise à une force axiale  $F$ .

Le flambement ne peut se produire que si  $|F|$  est supérieure à la charge critique  $\lambda$ . Cette charge critique de flambement est la plus petite valeur propre telle qu'il existe :

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} y : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad y = 0 \quad \text{solution de} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( E\alpha h \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \lambda \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{dans } ]0,1[ \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y''(0) = y''(1) = 0 \end{array} \right.$$

$E$  est le module de Young du matériau

$h$  est l'aire de la section droite

$\alpha$  est une constante positive qui dépend de la forme de la section droite si bien que  $I = \alpha h^2$  est le moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe  $oz$ .

$y$  représente la déflexion de l'état post-flambé (en théorie linéarisée),

Considérons l'espace  $V = H_0^1 (]0,1[) \cap H^2 (]0,1[)$  et les formes :

$$a(h; y, z) = E \alpha \int_0^1 h^2(x) \ddot{y}(x) \ddot{z}(x) dx$$

$$b(h; y, z) = \int_0^1 \dot{y}(x) \dot{z}(x) dx$$

où  $y, z \in V$  et  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$



$h$  étant fixé,  $a$  et  $b$  sont des formes bilinéaires symétriques continues sur  $V \times V$ .  $a$  est coercitive sur  $V$ . (Remarquons que  $b$  l'est aussi ; toutefois, par la suite nous ne ferons pas cette hypothèse car elle n'est pas satisfaite dans le cas du flambement d'une arche).

Le problème (2.1) peut alors être écrit sous la forme équivalente (principes des travaux virtuels) :

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ de plus petit module, tel que :} \\ \exists y \in V, y \neq 0 \quad \text{tel que } \forall z \in V \quad a(y, z) = \lambda b(y, z) \end{array} \right.$$

( $V$  espace de déplacements virtuels cinématiquement admissibles).

( $h$  étant fixé, nous avons omis d'écrire la dépendance en  $h$  dans l'équation).

Ce problème peut encore être exprimé sous une forme équivalente, à l'aide d'opérateurs linéaires continus de  $V$  dans  $V'$ . En effet, on sait (d'après le théorème de représentation de Riesz, Brezis (1983) [1]), qu'il existe 2 opérateurs linéaires continus.

$$\tilde{A} : V \rightarrow V' \quad \text{et} \quad \tilde{B} : V \rightarrow V'$$

tels que :

$$\begin{aligned} \forall y, z \in V \quad a(y, z) &= \langle \tilde{A}y, z \rangle_{V', V} \\ b(y, z) &= \langle \tilde{B}y, z \rangle_{V', V} \end{aligned}$$

Le problème (2.2) peut encore s'écrire :

$$(2.2') \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ du plus petit module, tel que :} \\ \exists y \in V, y \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \tilde{A}y = \lambda \tilde{B}y \quad \text{dans } V' \end{array}$$

On a :

Lemme 2.1 : L'opérateur  $\tilde{B}$  est compact de  $V$  dans  $V'$ .

En effet, la forme  $b$  peut se prolonger à  $H = (H_0^1(]0,1[)) ^2$ . On peut donc prolonger  $\tilde{B}$  en un opérateur linéaire continu  $B_H$  de  $H$  dans  $H'$ .

On a évidemment :

$$\tilde{B} = T_i \circ B_H \circ i$$

où  $i$  est l'injection de  $V$  dans  $H$  et  $T_i$  celle de  $H'$  dans  $V'$  ; ces injections sont compactes (par exemple Lions Magenes 1968 [11]) d'où la compactité de  $\tilde{B}$  par composition.  $\square$

Enfin, pour poser le problème de flambement sous sa forme définitive, nous considérons la structure hilbertienne de l'espace  $V = H_0^1(]0,1[) \times H^2(]0,1[)$ .

L'espace  $V'$  est isomorphe à  $V$ . Par la suite, nous les identifions, et considérerons les opérateurs de  $V$  dans  $V$  associés aux formes  $a$  et  $b$ .

Nous arrivons alors au problème :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ de plus petit module tel que :} \\ \exists y \in V, y \neq 0 \quad \text{tel que} \quad Ay = \lambda By \text{ dans } V \end{array} \right.$$

où

$A$  et  $B$  dépendant de  $h$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \langle Ay, z \rangle_{V \times V} &= a(h; y, z) & \forall y, z \in V \\ \langle By, z \rangle_{V \times V} &= b(h; y, z) & \forall y, z \in V. \end{aligned}$$

Les opérateurs  $A$  et  $B$  dépendent du paramètre  $h$  dans la mesure où les formes  $a$  et  $b$  en dépendent. Dans l'exemple de la poutre,  $b$  n'en dépend pas; dans le cas du flambement d'une arche, il en dépendra.

Remarquons que la symétrie des formes  $a$  et  $b$  implique que  $A$  et  $B$  sont autoadjoints. Par suite les valeurs propres  $\lambda$  seront réelles.

Notre but est d'optimiser l'aire de la section droite  $h$  de la poutre de façon à augmenter la charge de flambement  $\lambda$ . Nous étudierons donc la différentiabilité de  $\lambda$  par rapport à  $h$ .  $\lambda$  dépend implicitement de  $h$  par l'équation :

$\lambda(h) \in \mathbb{R}$  est la valeur de plus petit module telle que :

$$(2.3') \exists y(h) \in V, y(h) \neq 0 \quad \text{tel que} \quad A(h) y(h) = \lambda(h) B y(h)$$

Ce problème est un cas particulier du problème abstrait exposé dans le paragraphe suivant.

## 2.2. Donnée du problème abstrait

Soit  $V$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$  et  $\Phi \subset W$  un ouvert d'un espace de Banach  $W$ . On suppose donnés :

$$\begin{array}{ll} a : \Phi \times V \times V \rightarrow \mathbb{R} & \text{bilinéaire symétrique} \\ \phi, u, v \rightarrow a(\phi; u, v) & \text{continue coercitive en } u, v \text{ pour} \\ & \text{tout } \phi \in \Phi \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b : \Phi \times V \times V \rightarrow \mathbb{R} & \text{bilinéaire symétrique} \\ \phi, u, v \rightarrow b(\phi; u, v) & \text{continue en } u, v \text{ pour tout } \phi \in \Phi, \\ & \text{mais non nécessairement coercitive} \end{array}$$

Il existe alors des opérateurs  $A(\phi) : V \rightarrow V$  et  $B(\phi) : V \rightarrow V$  linéaires continus tels que :

$$\forall u, v \in V \quad a(\phi; u, v) = (A(\phi) u, v)_{V \times V}$$

$$\forall u, v \in V \quad b(\phi; u, v) = (B(\phi) u, v)_{V \times V}$$

On supposera par la suite que pour tout  $\phi \in \Phi$ , l'opérateur  $B(\phi)$  est compact.

Nous considérons les problèmes suivants :

1.  $\forall \phi \in \Phi$ , décrire l'ensemble des  $\lambda(\phi) \in \mathbb{C}$  tels que : il existe  $y(\phi) \neq 0$ , tel que :

$$(2.4) \quad \forall z \in V \quad a(\phi; y(\phi), z) = \lambda(\phi) b(\phi; y(\phi), z)$$

et montrer que cet ensemble possède un élément de plus petit module.

2. Etudier la différentiabilité des éléments de cet ensemble par rapport à  $\phi$ .

### 2.3. Description du spectre

Dans tout ce paragraphe,  $\phi$  est fixé. Pour alléger les notations, nous noterons  $a(y, z)$  pour  $a(\phi; y, z)$ ,  $b(y, z)$  pour  $b(\phi; y, z)$ ,  $A$  pour  $A(\phi)$ ,  $B$  pour  $B(\phi)$ .

Nous voulons décrire l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels qu'il existe  $y \in V$ ,  $y \neq 0$  tel que :

$$\forall z \in V \quad a(y, z) = \lambda b(y, z)$$

ou

$$(2.5) \quad Ay = \lambda By$$

Nous remarquons que du fait que la forme  $a$  est coercitive, l'opérateur  $A$  est défini positif, donc inversible.

Comme  $A$  est défini positif, il possède une unique racine carrée  $S$

$S : V \rightarrow V$  linéaire, continue, inversible

Elle vérifie :  $S^2 = A$  (Rudin (1978) [19] théorème 12.33).

PROPOSITION 2.2 : Soit  $S$  la racine carrée de  $A$  et  $K = S^{-1} B S^{-1}$

(i)  $K$  est compact autoadjoint

(ii) Si  $\lambda$  et  $y \neq 0$  vérifient  $Ay = \lambda By$  (2.6)

alors :

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \text{ et } z = Sy \text{ vérifient } Kz = \mu z \quad (2.7)$$

et réciproquement, à toute solution de (2.7) avec  $\mu \neq 0$  on peut associer une solution de (2.6) définie par  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ,  $y = S^{-1}z$ .

Démonstration :

Comme  $A$  est autoadjoint,  $S$  l'est aussi (Rudin (1978) [19] théorème 13.31) et comme  $B$  est compact autoadjoint,  $K = S^{-1} B S^{-1}$  l'est aussi. De plus l'équation (2.6) s'écrit encore :

$$SSy = \lambda By \quad \text{ou} \quad Sy = \lambda S^{-1} By$$

ou encore, en posant  $z = Sy$  (qui est non nul si et seulement si  $y$  est non nul) :

$$\lambda S^{-1} B S^{-1} z = z$$

De plus,  $A$  étant défini positif,  $\lambda$  ne peut être nul.

L'équation (2.6) entraîne donc :

$$S^{-1} B S^{-1} z = \mu z \quad \text{avec } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

La réciproque est immédiate si  $\mu \neq 0$ .

□

De cette proposition nous déduisons que l'ensemble des valeurs propres données par l'équation (2.6) est l'ensemble des inverses des valeurs propres non nulles données par l'équation (2.7). Les vecteurs propres se correspondent par l'opérateur  $S$ .

Remarquons que si  $B$  n'est pas inversible,  $0$  est valeur propre de  $K$ , mais ne correspond à aucune valeur propre de (2.6).

### COROLLAIRE 2.3 :

Les valeurs propres données par l'équation (2.6) forment une suite réelle  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments non nuls, telle que  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Elles sont toutes de multiplicité finie. Les vecteurs propres  $y_n$  associés forment un système complet de  $V$ . De plus, on a la caractérisation de Courant Fisher :

$$|\lambda|_{\min} = \inf_{\substack{y \in V \\ y \neq 0}} \frac{a(y, y)}{|b(y, y)|}$$

où  $|\lambda|_{\min} = \inf (|\lambda_n|)$ .

### Démonstration

Comme  $K$  est compact autoadjoint, son spectre est formé de valeurs propres réelles isolées non nulles plus éventuellement de la valeur zéro (Dieudonné (1968) [3] théorème 11.4.1 et 11.5.7). Il est formé d'une suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$|\mu_n| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

De plus ces valeurs propres sont de multiplicité finie et la suite de vecteurs propres  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associés forme un système complet de  $V$ .

Enfin ([Dieudonné] théorème 11.5.7) :

$$|\mu|_{\max} = \sup_{z \neq 0} \frac{|< Kz, z >|}{< z, z >}$$

où  $|\mu|_{\max} = \sup_n (|\mu_n|)$

$< \cdot, \cdot >$  désigne le produit scalaire dans  $V$ .

D'après la proposition 2.2, les valeurs propres données par l'équation (2.6) sont les inverses des éléments de la suite  $(\mu_n)$ . Elles forment donc une suite réelle  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ . Les vecteurs propres associés  $y_n = S^{-1}z_n$  forment un système complet de  $V$ . De plus :

$$|\lambda|_{\min} = \frac{1}{|\mu|_{\max}}$$

Or :

$$|\mu|_{\max} = \sup_{z \neq 0} \frac{|\langle Kz, z \rangle|}{\langle z, z \rangle} = \sup_{z \neq 0} \frac{|\langle S^{-1} B S^{-1} z, z \rangle|}{\langle z, z \rangle}$$

et, pour tout  $z \neq 0$  :

$$\frac{\langle S^{-1} B S^{-1} z, z \rangle}{\langle z, z \rangle} = \frac{\langle B S^{-1} z, S^{-1} z \rangle}{\langle z, z \rangle} \quad (S^{-1} \text{ est autoadjoint})$$

soit, en utilisant  $y = S^{-1} z$ , qui est non nul si et seulement si  $z$  est non nul :

$$|\mu|_{\max} = \sup_{y \neq 0} \frac{|\langle By, y \rangle|}{\langle Sy, Sy \rangle} = \sup_{y \neq 0} \frac{|b(y, y)|}{a(y, y)}$$

On en déduit :

$$|\lambda|_{\min} = \inf_{\substack{y \neq 0 \\ b(y, y) \neq 0}} \frac{a(y, y)}{|b(y, y)|}$$

□

Nous avons maintenant décrit l'ensemble des valeurs propres données par l'équation 2.4. En vue d'étudier leur différentiabilité, nous étudions la différentiabilité des opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $K$  par rapport à  $\lambda$ .

### 3. LE PROBLEME ABSTRAIT : DIFFERENTIABILITE DES OPERATEURS PAR RAPPORT AU PARAMETRE $\phi$

Etant donné que nous étudions ici la dépendance en  $\phi$  des opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $K$ , nous revenons à la notation  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$ . Nous notons  $S(\phi)$  la racine carrée de l'opérateur  $A(\phi)$  et :

$$K(\phi) = [S(\phi)]^{-1} B(\phi) [S(\phi)]^{-1}$$

Des hypothèses de différentiabilité seront faites sur les formes  $a(\phi; \dots)$  et  $b(\phi; \dots)$  qui peuvent être vérifiées dans les exemples que nous souhaitons traiter.

On en déduira des propriétés de différentiabilité des opérateurs (abstraits)  $A(\phi)$  et  $B(\phi)$ , puis de  $[S(\phi)]^{-1}$  et de  $K(\phi)$ .

#### Notations

Etant donné un ouvert  $\Phi \subset W$  où  $W$  est un espace de Banach,  $V$  un Hilbert et :

$$a : \Phi \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi, u, v \rightarrow a(\phi; u, v)$$

une forme bilinéaire continue et symétrique en  $u, v$  pour tout  $\phi \in \Phi$ , si pour tout  $u, v \in V$  l'application  $\phi \rightarrow a(\phi; u, v)$  est Fréchet-différentiable, on notera  $a'(\phi; u, v) \cdot \psi$  sa différentielle appliquée à l'accroissement  $\psi \in W$  :

$$a(\phi + \psi; u, v) = a(\phi; u, v) + a'(\phi; u, v) \cdot \psi + \|\psi\|_W \epsilon(\psi)$$

$$\text{où } \epsilon(\psi) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \psi \rightarrow 0.$$

On notera :

$$\delta_\psi a(\phi; u, v) = a(\phi + \psi; u, v) - a(\phi; u, v)$$

$$\delta_\psi^2 a(\phi; u, v) = a(\phi + \psi; u, v) - a(\phi; u, v) - a'(\phi; u, v) \cdot \psi.$$

#### Hypothèses

Nous supposerons par la suite que les 2 applications  $\phi \rightarrow a(\phi; u, v)$  et  $\phi \rightarrow b(\phi; u, v)$  sont différentiables pour tout  $u, v \in V$ , et de plus qu'elles satisfont les hypothèses suivantes :

$$(H0a) \quad \|\delta_\psi a(\phi; u, v)\| \leq e_0(\psi) \|\psi\|_W \|\psi\|_V$$

$$(H1a) \quad \|a'(\phi; u, v) \cdot \psi\| \leq c(\phi) \|\psi\|_W \|\psi\|_V$$



$$(H2a) \quad |\delta_\psi^2 a(\phi; u, v)| \leq e_2(\psi) \|\psi\|_W \|u\|_V \|v\|_V$$

$$(H0b) \quad |\delta_\psi b(\phi; u, v)| \leq e_0(\psi) \|\psi\|_W \|u\|_V \|v\|_V$$

$$(H1b) \quad |b'(\phi; u, v) \cdot \psi| \leq c(\phi) \|\psi\|_W \|u\|_V \|v\|_V$$

$$(H2b) \quad |\delta_\psi^2 b(\phi; u, v)| \leq e_2(\psi) \|\psi\|_W \|u\|_V \|v\|_V$$

(avec  $e_i(\psi) \rightarrow 0$  quand  $\psi \rightarrow 0$  pour  $i = 0, 2$ )

Remarquons que ces hypothèses peuvent être interprétées comme de la continuité ou de la Fréchet-différentiabilité de  $\phi \in W$  à valeur dans  $\mathcal{L}_2(V)$ , l'espace des formes bilinéaires continues sur  $V$ .

Aux formes  $a(\phi; \dots)$  et  $b(\phi; \dots)$  sont associés les opérateurs  $A(\phi)$  et  $B(\phi)$  par les identités :

$$\forall u, v \in V : a(\phi; u, v) = (A(\phi)u, v)_{V \times V}$$

$$b(\phi; u, v) = (B(\phi)u, v)_{V \times V}$$

ce qui définit les applications :

$$\phi \rightarrow A(\phi) : \Phi \subset W \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

$$\phi \rightarrow B(\phi) : \Phi \subset W \rightarrow \mathcal{L}(V).$$

### 3.1. Différentiabilité de $A(\phi)$ et $B(\phi)$

#### Lemme 3.1

(i) Sous l'hypothèse (H0a), l'application :

$\phi \rightarrow A(\phi)$  de  $\Phi \subset W$  dans  $\mathcal{L}(V)$  est continue.

Résultat analogue avec (H0b),

ii) Sous les hypothèses (H1a) et (H2a)

$\phi \rightarrow A(\phi)$  est Fréchet différentiable et l'on a :

$$\langle [A'(\phi) \cdot \psi]u, v \rangle = a'(\phi, u, v) \cdot \psi$$

(résultat analogue avec (H1b) et (H2b))

#### Démonstration

Il suffit de remarquer que si  $L \in \mathcal{L}(V)$ , on a :

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V)} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Lv\|_V}{\|v\|_V}$$

Mais du fait que  $V$  est un espace de Hilbert :

$$\|Lv\|_V = \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{|\langle Lv, u \rangle|}{\|u\|_V}$$

donc :

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V)} = \sup_{\substack{u, v \in V \\ u \neq 0, v \neq 0}} \frac{|\langle Lv, u \rangle|}{\|u\|_V \|v\|_V}$$

Raisonnons alors sur la forme a. On ferait de même pour b ; nous ne démontrons que le ii) ; le i) est analogue.

L'application

$$u, v \rightarrow a'(\phi; u, v) \cdot \psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

est bilinéaire continue. Donc il existe un opérateur linéaire  $L(\phi, \psi)$  de  $V$  tel que :

$$a'(\phi; u, v) \cdot \psi = \langle L(\phi, \psi)u, v \rangle.$$

Il est clair que l'application  $\psi \rightarrow L(\phi, \psi)$  est linéaire. Elle est continue car :

$$\begin{aligned} \|L(\phi, \psi)\|_{\mathcal{L}(V)} &= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ v \neq 0}} \frac{|\langle L(\phi, \psi)u, v \rangle|}{\|u\|_V \|v\|_V} \\ &= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ v \neq 0}} \frac{|a'(\phi, u, v) \cdot \psi|}{\|u\|_V \|v\|_V} \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant l'hypothèse H1a), nous donne :

$$\|L(\phi, \psi)\|_{\mathcal{L}(V)} \leq C(\phi) \|\psi\|_W.$$

En raisonnant de la même manière et à l'aide de l'hypothèse (H2a), on montre que :

$$\|A(\phi + \psi) - A(\phi) - L(\phi, \psi)\|_{\mathcal{L}(V)} \leq \epsilon(\psi) \|\psi\|$$

ce qui prouve que  $L(\phi, \psi)$  est la Fréchet-différentielle de  $A(\phi)$  appliquée à l'accroissement  $\psi$ .  $\square$

### 3.2. Différentiabilité de la racine carrée de A

Notons  $\mathcal{L}_a(V)$  l'espace de Banach des opérateurs autoadjoints bornés de V. On dira qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}_a(V)$  est coercitif si il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall v \in V : \langle Av, v \rangle \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

**PROPOSITION 3.2.** L'application

$$A \rightarrow S(A) \text{ (racine carrée de A)}$$

est différentiable sur l'ouvert de  $\mathcal{L}_a(V)$  formé des opérateurs coercitifs. De plus, si on note  $S(\phi)$  pour  $S(A(\phi))$  on a :

$$A'(\phi) \cdot \psi = S(\phi)[S'(\phi) \cdot \psi] + [S'(\phi) \cdot (\psi)]S(\phi)$$

Remarque 3.1. :

L'ensemble des opérateurs strictement positifs n'est pas ouvert. En effet, pour un opérateur autoadjoint le spectre  $\sigma(A)$ , qui est réel, vérifie (Dieudonné (1968) [3] 15.11.7)

$$\inf \sigma(A) = \inf_{\substack{y \in V \\ \|y\|=1}} \langle Ay, y \rangle.$$

Mais, comme le spectre est fermé, on peut avoir à la fois :

$$\forall y \in V \langle Ay, y \rangle > 0 \text{ et } 0 \in \sigma(A)$$

ce qui signifie que A n'est pas inversible. Il n'existe alors pas de voisinage de A inclus dans l'ensemble des opérateurs positifs.

Par contre, l'ensemble des opérateurs coercitifs est ouvert dans  $\mathcal{L}_a(V)$ . □

Démonstration de la proposition 3.2.

Rappelons que pour tout  $A \in \mathcal{L}_a(V)$ ,  $\sigma(A)$  est réel, fermé et

$$\inf \sigma(A) = \inf_{\|y\|=1} \langle Ay, y \rangle$$

$$\sup \sigma(A) = \sup_{\|y\|=1} \langle Ay, y \rangle = \|A\|.$$

(cf Dieudonné (1968) [3], 15.11.7). Si A est coercitif de constante  $\alpha > 0$ , de norme  $\|A\|$ , on a alors :

$$\sigma(A) \subset [\alpha, \|A\|].$$

Par ailleurs,  $A$  étant coercitif de constante  $\alpha$ , on sait (Kato (1966) [10], p. 281) que pour tout lacet  $\gamma(A)$  du plan complexe qui entoure  $\sigma(A)$ , et situé dans  $\{\zeta \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ , on a :

$$S(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(A)} \sqrt{z} (zI - A)^{-1} dz.$$

Pour dériver l'application  $A \rightarrow S(A)$ , nous remarquons d'abord que si  $A$  est dans un voisinage  $V(A_0)$  de  $A_0$ , assez petit, on a :

$$\sigma(A) \subset \left[ \frac{\alpha_0}{2}, 2 \|A_0\| \right].$$

Par suite pour tout  $A \in \mathcal{U}(A_0)$

$$S(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sqrt{z} (zI - A)^{-1} dz$$

où  $\gamma$  est un lacet qui entoure  $\sigma(A)$  indépendant de  $A \in \mathcal{U}(A_0)$  et situé dans  $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0\}$ .

Comme  $(z, A) \rightarrow \sqrt{z} (zI - A)^{-1}$  est manifestement continue dans  $\gamma \times \mathcal{U}(A_0)$  et de dérivée partielle continue, nous pouvons dériver sous le signe somme en utilisant un théorème élémentaire (cf par exemple 8.11.2. dans Dieudonné (1986) [3]).

La formule indiquée

$$A'(\phi) \cdot \psi = S(\phi) [S'(\phi) \cdot \psi] + [S'(\phi) \cdot \psi] S(\phi)$$

est alors une conséquence immédiate de :

$$A(\phi) = S(\phi)^2 \text{ puisque } \phi \rightarrow S(\phi) = S(A(\phi))$$

est différentiable par composition. □

Remarque 3.2. :

Nous avons choisi dans la démonstration ci-dessus d'utiliser l'intégrale de Dunford, ce que nous avons évité dans le reste de cet article. Ceci n'était pas indispensable. En effet, la racine carrée d'un opérateur peut aussi être définie par une série que l'on peut dériver terme à terme. Toutefois, une telle démonstration serait légèrement plus technique que celle proposée ici.

### 3.3. Différentiabilité de $K(\phi)$ :

En regroupant les résultats de cette section, on obtient :

#### PROPOSITION 3.3. :

Si les formes  $a$  et  $b$  satisfont les hypothèses H1a, H2a, H1b, H2b, alors l'application  $\phi \rightarrow K(\phi) = [S(\phi)]^{-1} B(\phi) [S(\phi)]^{-1}$

$$\phi \in W \rightarrow \mathcal{L}_a(V)$$

est différentiable.

#### Démonstration :

$S(\phi)$  étant inversible et  $\{\phi \rightarrow S(\phi)\}$  différentiable,  $\{\phi \rightarrow [S(\phi)]^{-1}\}$  est différentiable, et :

$$\frac{d}{d\phi} [S(\phi)]^{-1} \cdot \psi = -[S(\phi)]^{-1} [S'(\phi) \cdot \psi] [S(\phi)]^{-1}.$$

L'application  $\phi \rightarrow K(\phi)$  se différencie alors comme un produit.

□

#### Remarque 3.3.

Si au lieu des hypothèses de différentiabilité H1 et H2 on avait fait sur les formes  $a$  et  $b$  les seules hypothèses de continuité (H0a) et (H0b). On aurait alors conclu à la continuité des applications  $\phi \rightarrow A(\phi)$ ,  $\phi \rightarrow B(\phi)$  puis  $\phi \rightarrow K(\phi)$ .

□

Nous avons maintenant montré que sous les hypothèses H1a), H2a), H1b), H2b) l'opérateur  $K$  est une fonction différentiable de  $\phi$ . Etant donné que nous avons relié dans le paragraphe 2 les éléments propres  $(\lambda, y)$  tels que :

$$\forall z \in V \quad a(y, z) = \lambda b(y, z)$$

aux éléments propres de  $K$ , pour étudier la dérivabilité des éléments propres  $(\lambda, y)$  par rapport à  $\phi$ , nous étudions la dérivabilité des éléments propres de  $K$  dans le paragraphe qui suit. Par la suite, nous reviendrons aux formes  $a$  et  $b$ .

#### 4. CONTINUITE ET DIFFERENTIABILITE DES ELEMENTS PROPRES D'UN OPERATEUR COMPACT AUTOADJOINT :

Rappelons que le spectre d'un tel opérateur  $K$  est formé de valeurs propres réelles isolées formant une suite tendant vers 0. De plus 0 peut être valeur propre (si  $K$  n'est pas injectif) (Dieudonné (1968) [3], 11.5.7).

Notations :

Dans ce paragraphe on notera :  $(\mu_n)_n$  la suite des valeurs propres, (répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité) et :

.  $\mu_1^+, \dots, \mu_n^+ \dots$  la suite des valeurs propres positives de  $K$  ordonnées en ordre décroissant,  $\mu_1^+ \geq \mu_2^+ \geq \mu_3^+ \dots \geq \mu_n^+ \geq \dots > 0$

.  $\mu_1^- \leq \dots \leq \mu_n^- \leq \dots \leq 0$  est la suite des valeurs propres négatives ( $\mu_0=0$  peut être valeur propre)

.  $E(\mu_n)$  est le sous espace propre associé aux valeurs propres  $\mu_n = \mu_{n+1} = \mu_{n+m-1}$ .

.  $E(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_m})$  est la somme directe des sous-espaces propres associés à  $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_m}$ .

.  $E_{\text{nor}}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_m}) = \{v \in E(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_m}) ; \|v\| = 1\}$

*Rappels :*

Il est bien connu que pour des  $\mu_i$  distincts les  $E(\mu_i)$  sont orthogonaux entre eux.  $V$  est la somme directe de  $E(\mu_i)$  (Dieudonné (1968) [3], 11.5.7)

De plus, on a la caractérisation de Courant Fisher

$$(4.1) \mu_n^+ = \max_{\substack{v \perp E(\mu_1^+, \dots, \mu_{n-1}^+) \\ \|v\| = 1}} \langle Kv, v \rangle = \langle Kz_n^+, z_n^+ \rangle$$

où  $z_n^+$  est un vecteur unitaire quelconque de  $E(\mu_n^+)$ .

$$(4.2) \quad \mu_n^- = \min_{\substack{v \perp E(\mu_1^-, \dots, \mu_{n-1}^-) \\ ||v||=1}} \langle Kv, v \rangle = \langle Kz_n^-, z_n^- \rangle$$

où  $z_n^-$  est un vecteur unitaire quelconque de  $E(\mu_n^-)$ .

Enfin, on a aussi la caractérisation du mini-max (Dunford Schwarz (1963) [4], théorème X.4.3.) où  $V_{n-1}$  désigne un sous-espace vectoriel quelconque de  $V$ , de dimension  $n-1$ .

$$(4.3) \quad \mu_n^+ = \min_{V_{n-1} \subset V} \max_{\substack{v \in V_{n-1} \\ ||v||=1}} \langle Kv, v \rangle$$

Ce min max est atteint pour :

$$V_{n-1} = E(\mu_1^+ \dots \mu_{n-1}^+)$$

$v = z_n^+$  vecteur unitaire quelconque de  $E(\mu_n^+)$

$$(4.4) \quad \mu_n^- = \max_{V_{n-1} \subset V} \min_{\substack{v \perp V_{n-1} \\ ||v||=1}} \langle Kv, v \rangle$$

Ce max min étant atteint pour :

$$V_{n-1} = E(\mu_1^-, \dots, \mu_{n-1}^-)$$

$v = z_n^-$ , vecteur unitaire quelconque de  $E(\mu_n^-)$ .

Rappelons enfin que (Dieudonné (1968) [3], 11.5.7)

$$\begin{aligned} ||K|| &= \max(\mu_1^+, -\mu_1^-) \\ &= \max_{||v||=1} (\max_{||v||=1} \langle Kv, v \rangle, - \inf_{||v||=1} \langle Kv, v \rangle). \end{aligned}$$

#### 4.1. Continuité des éléments propres

Nous considérons maintenant le cas où l'opérateur  $K$  dépend d'un paramètre  $\phi$ . Plus précisément, en désignant par  $\mathcal{K}_a$  l'espace de Banach des opérateurs compacts autoadjoints de  $V$  (muni de la norme de  $\mathcal{L}(V)$ ), nous supposons donnée une application :

$$\phi \rightarrow K(\phi) : \Phi \rightarrow \mathcal{K}_a \quad \text{où } \Phi \subset W$$

On se propose ici d'étudier la continuité des éléments propres de  $K(\phi)$  par rapport à  $\phi$ . On note  $\mu_n(\phi)$  une valeur propre quelconque de  $K(\phi)$ ,  $E(\mu_n(\phi))$  le sous-espace propre correspondant. On a :

**PROPOSITION 4.1 :**

On suppose que l'application

$$\phi \rightarrow K(\phi) : \Phi \subset W \rightarrow \mathcal{H}_a$$

est continue au point  $\phi_0$ . Soit  $\mu_n(\phi_0)$  une valeur propre non nulle de  $K(\phi_0)$ , de multiplicité  $m$  :

$$\forall j=0, \dots, m-1, \mu_{n+j}(\phi_0) = \mu_n(\phi_0). \quad \text{Alors :}$$

$$\forall j=0, \dots, m-1, \mu_{n+j}(\phi) \rightarrow \mu_n(\phi_0) \text{ quand } \phi \rightarrow \phi_0$$

**Démonstration**

La continuité de  $K$  fournit pour  $\epsilon > 0$ , l'existence de  $\delta > 0$  tel que pour  $\|\phi - \phi_0\| \leq \delta$  on ait  $\|K(\phi) - K(\phi_0)\| \leq \epsilon$ , donc pour  $\|v\| = 1$  :

$$\langle K(\phi_0)v, v \rangle - \epsilon \leq \langle K(\phi)v, v \rangle \leq \langle K(\phi_0)v, v \rangle + \epsilon$$

d'où avec (4.3)

$$\mu_n^+(\phi_0) - \epsilon \leq \mu_n^+(\phi) \leq \mu_n^+(\phi_0) + \epsilon$$

et donc la continuité de  $\mu_n^+$  ; la continuité de  $\mu_n^-$  s'obtient de même avec (4.4). □

**COROLLAIRE 4.2.**

Supposons que l'application  $\phi \rightarrow K(\phi)$  soit localement lipschitzienne au voisinage de  $\phi_0$ . Alors l'application  $\phi \rightarrow \mu_n(\phi)$  est localement lipschitzienne avec la même constante au voisinage de  $\phi_0$ .

**Démonstration**

On suppose qu'il existe  $C$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\|\phi - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|K(\phi) - K(\phi_0)\| \leq C \|\phi - \phi_0\|.$$

On a alors comme précédemment pour tout  $v$  tel que  $\|v\| = 1$  :

$$\langle K(\phi_0)v, v \rangle - C \|\phi - \phi_0\| \leq \langle K(\phi)v, v \rangle \leq \langle K(\phi_0)v, v \rangle + C \|\phi - \phi_0\|$$

d'où le résultat avec la formule (4.3) ou (4.4). □



Etudions maintenant la continuité des sous espaces propres. Précisons d'abord ce que nous entendons par là : rappelons que si  $\mu(\phi_0)$  désigne une valeur propre de  $K(\phi_0)$ ,  $E(\mu(\phi_0))$  désigne le sous espace propre associé à  $\mu(\phi_0)$  et  $E_{\text{nor}}(\mu(\phi_0)) = \{z \in E(\mu(\phi_0)) ; \|z\| = 1\}$ .

On considère :

$$E_{\text{nor}}(\mu(\phi_0), \epsilon) = \{v \in V ; \|v\| = 1, d(v, E_{\text{nor}}(\mu(\phi_0))) \leq \epsilon\}$$

**DEFINITION 4.3 :**

Soit  $\mu_n(\phi_0)$  une valeur propre de  $K(\phi_0)$  d'ordre  $m$  ( $\mu_{n+j}(\phi_0) = \mu_n(\phi_0)$  pour  $j = 0, \dots, m-1$ ). On dira que :

$$E(\mu_n(\phi), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi)) \rightarrow E(\mu_n(\phi_0)) \text{ lorsque } \phi \rightarrow \phi_0$$

si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \|\phi - \phi_0\| < \delta \Rightarrow E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi)) \subset E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0), \epsilon).$$

Cette définition de continuité des sous espaces propres est assez classique : voir par exemple Kato (1966) [10] où la continuité est démontrée à l'aide de l'intégrale de Dunford ; indiquons que si  $\mu(\phi_0)$  est multiple, on n'a pas en général continuité des vecteurs propres (même référence).

**Lemme 4.4. :**

Soit  $\mu_n(\phi_0)$  une valeur propre non nulle d'ordre  $m$  de  $K(\phi_0)$ . Soit  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite convergeant dans  $\Phi$  vers  $\phi_0$ . Soit  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $V$  tels que :

$$\text{pour tout } k, z_k \in E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_k), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi_k)).$$

Si cette suite converge faiblement dans  $V$  vers un élément  $z^*$ , alors :

1.  $z^* \in E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0))$
2.  $z_k \rightarrow z^*$  fortement dans  $V$ .

Démonstration :

Etant donné que  $z_k \in E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_k), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi_k))$  c'est un vecteur propre de  $K(\phi_k)$  associé à une valeur propre  $\mu(\phi_k) \in \{\mu_n(\phi_k), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi_k)\}$  de  $K(\phi_k)$ . Lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,  $\mu(\phi_k) \rightarrow \mu_n(\phi_0)$  d'après la proposition 4.1. On a alors :

$$\begin{aligned}\mu(\phi_k) z_k &= K(\phi_k) z_k \\ &= K(\phi_0) z_k + [K(\phi_k) - K(\phi_0)] z_k\end{aligned}$$

Passons à la limite forte dans cette égalité :

$$\cdot \quad || [K(\phi_k) - K(\phi_0)] z_k || \leq || K(\phi_k) - K(\phi_0) || \rightarrow 0$$

•  $K(\phi_0)$  étant un opérateur compact, la suite  $K(\phi_0) z_k$  converge fortement vers  $K(\phi_0) z^*$

$$\cdot \quad \mu(\phi_k) \rightarrow \mu_n(\phi_0) \neq 0$$

Donc  $z_k$  tend fortement vers :

$$z = \frac{1}{\mu_n(\phi_0)} K(\phi_0) z^*$$

Cette limite forte ne peut évidemment qu'être la limite faible. Donc  $z = z^*$ . La suite  $(z_k)$  converge donc fortement vers  $z^*$ , qui est de norme 1 puisque  $z_k$  est de norme 1, et qui satisfait :

$$\mu_n(\phi_0) z^* = K(\phi_0) z^*$$

Donc :

$$z^* \in E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0))$$

□

On en déduit le théorème suivant :

**THEOREME 4.5 :**

Soit  $\phi \rightarrow K(\phi) : \Phi \rightarrow \mathcal{H}_a$  une fonction continue.

Soit  $\mu_n(\phi_0) \neq 0$  une valeur propre d'ordre  $m$  de  $K(\phi_0)$  telle que :

$$\mu_{n-1}(\phi_0) \neq \mu_n(\phi_0).$$

Alors, lorsque  $\phi \rightarrow \phi_0$ ,  $E(\mu_n(\phi), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi))$  tend vers  $E(\mu_n(\phi_0))$  au sens de la définition 4.3.

**Démonstration :**

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors il existerait  $\epsilon > 0$  et une suite  $\phi_k \rightarrow \phi_0$  telle que :

$$E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_k), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi_k)) \not\subset E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0), \epsilon).$$

On pourrait alors trouver une suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que :

$$z_k \in E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_k), \dots, \mu_{n+m-1}(\phi_k)),$$

avec

$$d(z_k, E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0))) > \epsilon$$

Cette suite étant formée de vecteurs unitaires, on peut en extraire une suite faiblement convergente.

D'après le lemme 4.4, sa limite faible  $z^*$  est aussi une limite forte, et c'est un élément de  $E_{\text{nor}}(\mu(\phi_0))$ .

Mais comme :

$$d(z^*, E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0))) > \epsilon$$

On aurait aussi :

$$d(z^*, E_{\text{nor}}(\mu_n(\phi_0))) > \epsilon$$

D'où la contradiction. □

#### 4.2. Semi-différentiabilité de la plus grande et plus petite valeur propre.

Lorsque l'opérateur  $K(\phi)$  est Fréchet-différentiable par rapport à  $\phi$ , et qu'apparaît une valeur propre multiple  $\mu(\phi)$ , cette valeur propre n'est pas en général Fréchet-différentiable. Nous allons justifier dans ce paragraphe que  $\mu_1^+$  et  $\mu_1^-$  jouissent de propriétés de dérivation directionnelle utilisées pour écrire des conditions d'optimalité ; la terminologie est inspirée de Ioffe-Tihomirov (1979) [8].

**DEFINITION** : Soit  $\Phi$  un ouvert d'un espace de Banach  $W$  et  $J : \Phi \subset W \rightarrow B$  où  $B$  est un espace de Banach.

1.  $J$  est dite semi-dérivable en  $\phi \in \Phi$  si pour tout  $\psi \in W$ , il existe un réel  $J'(\phi, \psi) \in B$  tel que :

$$\frac{J(\phi + t\psi) - J(\phi)}{t} \xrightarrow[t>0]{t \rightarrow 0} J'(\phi, \psi)$$

2.  $J$  est dite uniformément semi-différentiable en  $\phi \in \Phi$  si elle est semi-dérivable et si de plus :

$$\forall \psi_1 \in W \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0,$$

$$(0 < t < \delta_0, \quad \|\psi - \psi_1\| < \delta_1) \Rightarrow \left\| \frac{J(\phi + t\psi) - J(\phi)}{t} - J'(\phi, \psi_1) \right\| < \epsilon$$

3. Si  $B = \mathbb{R}$ ,  $J$  est dite localement convexe (resp. concave) si elle est semi-dérivable et si l'application  $\psi \rightarrow J'(\phi, \psi)$  est convexe (resp. concave).
4.  $J$  est dite régulièrement localement convexe (resp. concave) si elle est uniformément semi-différentiable et localement convexe (resp. concave).

Remarquons que la 2<sup>ème</sup> propriété implique que l'application  $\psi \rightarrow J'(\phi, \psi)$  est continue. Par ailleurs, si  $J$  est Fréchet différentiable, elle est clairement régulièrement localement convexe (Ioffe-Tihomirov (1979) [8] § 4.4.1 th. 2).

Nous allons montrer que si  $\phi \rightarrow K(\phi) : \phi \in W \rightarrow \mathcal{H}_a^2$  est Fréchet-différentiable, alors la plus grande valeur propre positive est régulièrement localement convexe, la plus petite négative est régulièrement localement concave. Nous allons voir qu'en fait :

Si  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est uniformément semi-différentiable, alors  $\phi \rightarrow \mu_1^+(\phi)$  et  $\phi \rightarrow \mu_1^-(\phi)$  sont uniformément semi-différentiables.

Si  $\psi \rightarrow K'(\phi, \psi)$  est linéaire alors  $\psi \rightarrow [\mu_1^+]'$  ( $\phi, \psi$ ) est convexe (resp. concave).

Ainsi, l'hypothèse  $\phi \rightarrow K(\phi)$  Fréchet-différentiable est plus forte que nécessaire. Toutefois, si  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est Fréchet-différentiable,  $\mu_1^+$  et  $\mu_1^-$  ne sont pas mieux que régulièrement localement convexes et concaves, du moins si ce sont des valeurs propres multiples.

Nous verrons dans le § 4.3 qu'une valeur propre simple est Fréchet-différentiable.

Etudions tout d'abord la plus grande valeur propre. Nous utiliserons pour ceci les notations allégées suivantes :  $\phi$  est un élément fixé de  $\Phi$ ,  $\psi_1$  un élément fixé de  $W$ .

.  $\mu(\phi)$  désigne la plus grande valeur propre positive de  $K(\phi)$ . Elle peut être multiple.

. on note  $E(\phi)$  pour  $E[\mu(\phi)]$ ,  $E_{\text{nor}}(\phi)$  pour  $E_{\text{nor}}[\mu(\phi)]$ ,  $E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon)$  pour  $E_{\text{nor}}[\mu(\phi), \epsilon]$ .

. on écrira souvent  $K$  pour  $K(\phi)$ , et  $K_1'$  pour  $K'(\phi, \psi_1)$ , (qui n'est autre que  $K'(\phi)$ .  $\psi_1$  lorsque  $K$  est Fréchet-différentiable).

Commençons par montrer un lemme dont nous aurons besoin par la suite :

#### Lemme 4.7 :

Soit  $L$  un opérateur autoadjoint borné ;  
on a, pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon)} \langle Lv, v \rangle \leq \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi)} \langle Lv, v \rangle + 2\epsilon \|L\|$$

Démonstration:

Soit  $v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon)$ . On sait qu'il existe  $\tilde{v} \in E_{\text{nor}}(\phi)$  tel que :

$$\|v - \tilde{v}\| \leq \epsilon.$$

$L$  étant autoadjoint, on peut remarquer que :

$$\langle Lv, v \rangle - \langle L\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \langle L(v - \tilde{v}), v + \tilde{v} \rangle.$$

Donc :

$$|\langle Lv, v \rangle - \langle L\tilde{v}, \tilde{v} \rangle| \leq \|L\| \|v - \tilde{v}\| [\|v\| + \|\tilde{v}\|]$$

Et comme  $\|v\| = \|\tilde{v}\| = 1$

$$\langle Lv, v \rangle \leq \langle L\tilde{v}, \tilde{v} \rangle + 2\|L\|\epsilon.$$

Nous avons donc montré que  $\forall v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon)$ , il existe  $\tilde{v} \in E_{\text{nor}}(\phi)$  tel que :

$$\langle Lv, v \rangle \leq \langle L\tilde{v}, \tilde{v} \rangle + 2\|L\|\epsilon.$$

On en déduit le résultat annoncé. □

Montrons maintenant :

THEOREME 4.8 :

Si l'application  $\phi \rightarrow K(\phi) : \Phi \subset W \rightarrow \mathcal{H}_a$  est uniformément semi-différentiable, alors l'application  $\phi \rightarrow \mu_1^+(\phi)$  est uniformément semi-différentiable,  $(\mu_1^+(\phi))$  désigne la plus grande valeur propre positive de  $K(\phi)$ . De plus :

$$[\mu_1^+] '(\phi, \psi_1) = \sup \{ \langle K'(\phi, \psi_1) v, v \rangle / Kv = \mu_1^+ v, ||v|| = 1 \}$$

Démonstration :

Nous notons toujours  $\mu_1^+(\phi) = \mu(\phi)$ .

Nous voulons montrer que :

$$\forall \psi_1 \in W \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0, \\ (0 < t < \delta_0, ||\psi - \psi_1|| < \delta_1) \Rightarrow$$

$$(4.5) \quad \mu(\phi + t\psi) \geq \mu(\phi) + t \mu'(\phi, \psi_1) - \epsilon t$$

$$(4.6) \quad \mu(\phi + t\psi) \leq \mu(\phi) + t \mu'(\phi, \psi_1) + \epsilon t$$

avec :

$$\mu'(\phi, \psi_1) = \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi)} \langle K'(\phi, \psi_1) v, v \rangle.$$

Nous démontrerons d'abord la 1<sup>ère</sup> inégalité, ce qui ne présente pas de difficulté, puis la 2<sup>ème</sup>, qui est plus technique.

L'hypothèse d'uniforme semi-différentiabilité implique que :

$$\forall \psi_1 \in W \quad \forall \epsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \exists \delta_3 > 0, \\ (0 < t < \delta_2, ||\psi - \psi_1|| < \delta_3) \Rightarrow$$

$$(4.7) \quad \forall v \in V \quad \langle Kv, v \rangle + t \langle K'_1 v, v \rangle - \epsilon_1 t \leq \langle K(\phi + t\psi) v, v \rangle$$

$$(4.8) \quad \forall v \in V \quad \langle K(\phi + t\psi) v, v \rangle \leq \langle Kv, v \rangle + \langle K'_1 v, v \rangle + \epsilon_1 t.$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned}\mu(\phi) &= \sup_{||v||=1} \langle Kv, v \rangle = \sup_{z \in E_{\text{nor}}(\phi)} \langle Kz, z \rangle \\ &= \langle Kz, z \rangle \quad \text{pour tout } z \in E_{\text{nor}}(\phi)\end{aligned}$$

Première étape

Nous démontrons (4.5). Dans l'inégalité (4.7), prenons le sup des 2 membres pour  $v \in V$ ,  $||v||=1$ . On obtient :

$$\mu(\phi+t\psi) \geq \sup_{||v||=1} \{ \langle Kv, v \rangle + t \langle K'_1 v, v \rangle \} - \epsilon_1 t.$$

Mais,

$$\begin{aligned}\sup_{||v||=1} \{ \langle Kv, v \rangle + t \langle K'_1 v, v \rangle \} &\geq \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi)} \{ \langle Kv, v \rangle + t \langle K'_1 v, v \rangle \} \\ &= \mu(\phi) + t \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi)} \langle K'_1 v, v \rangle\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité (4.5) en choisissant, dans 4.7,  $\epsilon_1 = \epsilon$ , puis pour (4.5)  $\delta_0 = \delta_2$  et  $\delta_1 = \delta_3$ .

Deuxième étape

Nous démontrons (4.6). Nous utilisons l'inégalité (4.8) ; on sait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t < \delta_2 \\ ||\psi - \psi_1|| < \delta_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle K(\phi+t\psi)v, v \rangle \leq \langle (K+t K'_1)v, v \rangle + \epsilon_1 t$$

Prenons le sup en  $v$ , pour  $||v||=1$ , de chaque membre de l'inégalité. En notant  $\tilde{\mu}(K+tK'_1)$  la plus grande valeur propre positive de  $K+t K'_1$ , nous obtenons :

$$(4.9) \left\{ \begin{array}{l} 0 < t < \delta_2 \\ ||\psi - \psi_1|| < \delta_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(\phi+t\psi) \leq \tilde{\mu}(K+tK'_1) + \epsilon_1 t.$$



Il nous faut maintenant comparer  $\tilde{\mu}(K+tK'_1)$  avec  $\mu(\phi) + t \mu'(\phi, \psi_1)$ .

Par continuité des valeurs propres, on sait que lorsque  $\|t K'_1\|$  tend vers 0,  $\tilde{\mu}(K+tK'_1)$  tend vers  $\mu(\phi)$ . De plus, la multiplicité de  $\tilde{\mu}(K+tK'_1)$  lorsque  $tK'_1$  est voisin de 0 est inférieure ou égale à celle de  $\mu(\phi)$ . L'espace propre  $E[\tilde{\mu}(K+tK'_1)]$  associé à  $\tilde{\mu}(K+tK'_1)$  est de dimension inférieure ou égale à celle de  $E(\phi)$ . D'après le théorème 4.5 sur la continuité de sous espaces propres, on sait que :

$$\forall \epsilon_2 > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \|tK'_1\| < \delta \Rightarrow E_{\text{nor}}(\tilde{\mu}(K+tK'_1)) \subset E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon_2).$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(K+tK'_1) &= \sup_{z \in E_{\text{nor}}[\tilde{\mu}(K+tK'_1)]} \langle (K+tK'_1)z, z \rangle \\ &\leq \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon_2)} \langle (K+tK'_1)v, v \rangle \\ &= \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon_2)} \langle Kv, v \rangle + t \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon_2)} \langle K'_1 v, v \rangle. \end{aligned}$$

Or pour  $\epsilon_2$  assez petit,

$$\sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon_2)} \langle Kv, v \rangle = \mu(\phi)$$

et d'après le lemme 4.7, comme  $K'_1$  est autoadjoint :

$$\sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi, \epsilon_2)} \langle K'_1 v, v \rangle \leq \sup_{v \in E_{\text{nor}}(\phi)} \langle K'_1 v, v \rangle + 2\epsilon_2 \|K'_1\|$$

On obtient donc :

$$\forall \epsilon_2 > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \|tK'_1\| < \delta \Rightarrow \tilde{\mu}(K+tK'_1) \leq \mu(\phi) + t \mu'(\phi, \psi_1) + 2\epsilon_2 t \|K'_1\|$$

et si  $\psi_1$  est fixé, pour :

$$0 < t < \frac{\delta}{\|K'_1\|}$$

on a :

$$\tilde{\mu}(K+tK'_1) \leq \mu(\phi) + t \mu'(\phi, \psi_1) + 2\epsilon_2 t \|K'_1\|.$$

Regroupons cette inégalité avec l'inégalité (4.9).  $\psi_1$  étant fixé, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t < \min(\delta_2, \frac{\delta}{\|K'_1\|}) \\ \|\psi - \psi_1\| < \delta_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(\phi + t\psi) \leq \mu(\phi) + t\mu'(\phi, \psi_1) + t(2\epsilon_2 \|K'_1\| + \epsilon_1).$$

$\epsilon$  étant donné, si nous posons  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{4\|K'_1\|}$ ,

on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t < \delta_0 = \min(\delta_2, \frac{\delta}{\|K'_1\|}) \\ \|\psi - \psi_1\| < \delta_1 = \delta_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(\phi + t\psi) \leq \mu(\phi) + t\mu'(\phi, \psi_1) + \epsilon t$$

En regroupant les 2 parties de cette démonstration, on obtient le résultat du théorème 4.8.  $\square$

**COROLLAIRE 4.9.** Si l'application  $\phi \rightarrow K(\phi) : \phi \in W \rightarrow \mathcal{K}_a$  est uniformément semi-différentiable, et si l'application :

$$\psi \rightarrow K'(\phi, \psi) : W \rightarrow \mathcal{K}_a$$

est linéaire (en particulier si  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est Fréchet différentiable), alors l'application

$$\phi \rightarrow \mu_1^+(\phi) : \phi \in W \rightarrow \mathbb{R} \text{ (plus grande valeur propre positive)}$$

est régulièrement localement convexe et :

$$[\mu_1^+]'(\phi, \psi) = \sup\{ \langle K'(\phi, \psi)v, v \rangle / Kv = \mu_1^+ v, \|v\| = 1 \}$$

#### Démonstration

Le théorème 4.8 fournit l'uniforme semi-différentiabilité de  $\mu_1^+$ . La locale convexité est une conséquence immédiate de la linéarité de  $K'(\phi, \psi)$ .  $\square$

COROLLAIRE 4.10 :

Si l'application  $\phi \rightarrow K(\phi) : \Phi \subset W \rightarrow \mathcal{H}_a$  est uniformément semi différentiable, et si l'application :

$$\psi \rightarrow K'(\phi, \psi) : W \rightarrow \mathcal{H}_a$$

est linéaire (en particulier si  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est Fréchet différentiable), alors l'application :

$$\phi \rightarrow \mu_1^-(\phi) : \phi \in W \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{plus petite valeur propre négative})$$

est régulièrement localement concave, et :

$$[\mu_1^-]'(\phi, \psi) = \text{Inf} \{ \langle K'(\phi, \psi)v, v \rangle / Kv = \mu_1^-v, ||v||=1 \}$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le résultat du corollaire 4.9. à l'opérateur  $-K$ . □

**4.3. Fréchet-différentiabilité des éléments propres dans le cas d'une valeur propre simple**

Considérons une valeur du paramètre  $\phi \in \Phi$  et une valeur propre quelconque  $\mu(\phi)$  de  $K(\phi)$ , qu'on suppose simple, et un vecteur propre normalisé  $z(\phi)$  associé. On sait alors que pour  $\psi \in W$ , de norme suffisamment petite il existe une valeur propre simple  $\mu(\phi+\psi)$  de  $K(\phi+\psi)$  convergeant vers  $\mu(\phi)$  lorsque  $\psi \rightarrow 0$ . Par continuité des sous espaces propres, on sait qu'on peut aussi choisir un vecteur propre normalisé  $z(\phi+\psi)$  associé à  $\mu(\phi+\psi)$  variant de façon continue lorsque  $\psi \rightarrow 0$ , convergeant vers  $z(\phi)$ . Avant de montrer que les fonctions  $\mu$  et  $z$  sont différentiables en  $\phi$ , nous allons montrer que la fonction  $z$  est localement lipschitzienne en  $\phi$  dès que  $K$  l'est, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha \exists c(\phi), ||\psi|| < \alpha \Rightarrow ||z(\phi+\psi) - z(\phi)|| < c(\phi) ||\psi||.$$

Rappelons que l'on a vu dans 4.2.1. que  $\mu$  est localement lipschitzienne.

## Notations

.  $\phi \in \Phi$  est fixé. On note :

$K$  pour  $K(\phi)$

$\mu$  pour  $\mu(\phi)$

$z$  pour  $z(\phi)$

. Etant donné  $\psi \in W$ , voisin de 0, on note :

$$\delta K = K(\phi+\psi) - K(\phi)$$

$$\delta \mu = \mu(\phi+\psi) - \mu(\phi)$$

$$\delta z = z(\phi+\psi) - z(\phi)$$

Il s'agit de montrer que  $||\delta z|| \leq C(\phi) ||\psi||$ .

## PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION :

On a :

$$Kz = \mu z$$

$$(K+\delta K)(z+\delta z) = (\mu+\delta \mu)(z+\delta z)$$

Comme on sait que  $||\delta K|| \leq C ||\psi||$  et  $\delta \mu \leq C ||\psi||$ , en vue d'utiliser ces majorations, nous pouvons réécrire ces égalités :

$$(K-\mu I) \delta z = (\delta \mu I - \delta K)(z+\delta z)$$

ou encore, en faisant le produit scalaire par  $\delta z$  :

$$(4.10) \quad \langle (K-\mu I) \delta z, \delta z \rangle = \langle (\delta \mu I - \delta K)(z+\delta z), \delta z \rangle$$

D'où on déduit :

$$| \langle (K-\mu I) \delta z, \delta z \rangle | \leq C(\phi) ||\psi|| ||z+\delta z|| ||\delta z||$$

Pour conclure, il suffirait de pouvoir minorer  $| \langle (K-\mu I) v, v \rangle |$  par  $C ||v||^2$ . Cette minoration n'a en général pas lieu (elle est en particulier fausse si  $v$  est colinéaire à  $z$ ).

Projetons alors orthogonalement  $\delta z$  sur  $z$  :

$$\delta z = \alpha z + \delta z^\perp \quad \text{avec} \quad \alpha = \langle z, \delta z \rangle$$

$$\langle \delta z^\perp, z \rangle = 0$$

On a alors :

Lemme 4.11. : Il existe  $C_0(\phi)$  tel que pour tout  $v$  orthogonal à  $z$  :

$$|\langle (K - \mu I) v, v \rangle| \geq C_0(\phi) \|v\|^2$$

Démonstration :

Comme  $K$  est compact autoadjoint, l'espace  $V$  peut être décomposé en somme directe orthogonale :

$$V = E(\mu) \oplus E^+(\mu) \oplus E^-(\mu) \oplus E^0$$

où  $E_0$  est le noyau de  $K$

$E(\mu)$  est l'espace propre associé à  $\mu$  (qui est la droite engendrée par  $u$ ).

$E^+(\mu)$  est le sous espace propre associé aux valeurs propres supérieures à  $\mu$ .

$E^-(\mu)$  est le sous espace propre associé aux valeurs propres inférieures à  $\mu$ .

(cf. Dieudonné (1968) [3] 11.5.7.).

1. Si  $v \in E^0$  :

$$|\langle (K - \mu I) v, v \rangle| = |\mu| \|v\|^2$$

2. Si  $v \in E^+(\mu)$

$$\langle (K - \mu I) v, v \rangle \geq (\mu^+ - \mu) \|v\|^2$$

où  $\mu^+$  est la plus petite valeur propre supérieure à  $\mu$ .

3. Si  $v \in E^-(\mu)$  :

$$\langle (K - \mu I) v, v \rangle \leq (\mu^- - \mu) \|v\|^2$$

où  $\mu^-$  est la plus grande valeur propre inférieure à  $\mu$ .

En posant  $C_0(\phi) = \min(\mu^+ - \mu, |\mu^- - \mu|, |\mu|)$ , on obtient le résultat.  $\square$

Lemme 4.12 : Pour  $\psi$  voisin de 0, on a :

$$\frac{1}{2} \|\delta z\|^2 \leq \|\delta z^\perp\|^2 \leq \|\delta z\|^2$$

Démonstration :

On sait que  $\|z\| = \|z + \delta z\| = 1$

On en déduit que :

$$2 \langle z, \delta z \rangle + \|\delta z\|^2 = 0$$

C'est à dire (par définition de  $\alpha$ ) :

$$2\alpha = - \|\delta z\|^2$$

Par ailleurs :

$$\|\delta z\|^2 = \|\alpha z + \delta z^\perp\|^2 = \alpha^2 + \|\delta z^\perp\|^2$$

Donc :

$$\|\delta z\|^2 = \frac{1}{4} \|\delta z\|^4 + \|\delta z^\perp\|^2$$

C'est à dire :

$$\|\delta z\|^2 \left(1 - \frac{1}{4} \|\delta z\|^2\right) = \|\delta z^\perp\|^2$$

Or lorsque  $\psi \rightarrow 0$ , on sait que  $\delta z \rightarrow 0$ , donc pour  $\psi$  voisin de 0 :

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{4} \|\delta z\|^2 \leq 1$$

ce qui nous donne le résultat.  $\square$

Nous pouvons maintenant montrer :

**THEOREME 4.13 :**

Si  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est localement lipschitzienne en  $\phi$  alors  $\phi \rightarrow z(\phi)$  est localement lipschitzienne en  $\phi$ .

(Pour  $z(\phi)$  représentant continu associé à une valeur propre simple).

**Démonstration :**

Utilisons l'identité (4.10). Tout d'abord, en utilisant le fait que  $(K-\mu I) z = 0$  et la symétrie de l'opérateur  $K-\mu I$ , on voit que :

$$\langle (K-\mu I) \delta z, \delta z \rangle = \langle (K-\mu I) \delta z^\perp, \delta z^\perp \rangle$$

L'inégalité (4.10) nous donne donc :

$$|\langle (K-\mu I) \delta z^\perp, \delta z^\perp \rangle| \leq C(\phi) \|\psi\| \|z+\delta z\| \|\delta z\|$$

D'où on tire en utilisant le lemme (4.11)

$$C_0(\delta) \|\delta z^\perp\|^2 \leq C(\delta) \|\psi\| \|z+\delta z\| \|\delta z\|$$

D'après le lemme (4.12) on a :

$$\|\delta z^\perp\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\delta z\|^2$$

En choisissant  $\psi$  assez petit pour que  $\|\delta z\|$  soit par exemple inférieur à  $\|z\|$ , on obtient alors :

$$\|\delta z\| \leq C_1(\phi) \|\psi\|$$

□

Montrons maintenant.

**THEOREME 4.14 :**

Si  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est Fréchet différentiable, alors toute valeur propre simple  $\phi \rightarrow \mu(\phi)$  est Fréchet différentiable ; si  $\phi \rightarrow z(\phi) \in E_{\text{nor}}(\mu(\phi))$  est un représentant continu, il est aussi Fréchet différentiable.

De plus on a :

$$(4.11) \quad \mu'(\phi) \cdot \psi = \langle [K'(\phi) \cdot \psi] z, z \rangle$$

et  $z'(\phi) \cdot \psi$  est l'unique solution de :

$$(4.12) \quad (K - \mu I) z' = - (K - \mu' I) z$$

$$\langle z, z' \rangle = 0$$

où l'on a noté

$$K' = K'(\phi) \cdot \psi \text{ et}$$

$$\mu' = \mu'(\phi) \cdot \psi$$

### Démonstration :

#### 1. Définition de $\mu'(\phi) \cdot \psi$

Remarquons que la formule (4.11) définit une forme linéaire continue puisque  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est Fréchet différentiable. On montrera plus loin que  $\mu'(\phi) \cdot \psi$  est bien la différentielle de  $\phi \rightarrow \mu(\phi)$  en majorant :

$$|\mu(\phi + \psi) - \mu(\phi) - \mu'(\phi) \cdot \psi|$$

#### 2. Définition de $z'(\phi) \cdot \psi$

Différentions formellement

$$(K - \mu I) z = 0$$

$$(z, z) = 1$$

On obtient 4.12 :

$$(K - \mu I) z' = - (K' - \mu' I) z$$

$$\langle z, z' \rangle = 0$$

Montrons que ce système possède une unique solution  $z'$  et que l'application  $\psi \rightarrow z' = z'(\phi) \cdot \psi$  est linéaire continue.

Le noyau de  $K - \mu I$  est  $E(\mu)$  (le sous espace propre) ; avec la définition de  $\mu'$  on voit que :

$$-(K' - \mu' I) z \text{ est orthogonal à } E(\mu).$$



Par suite l'alternative de Fredholm assure l'existence d'une unique solution de  $(K - \mu I) z' = - (K' - \mu' I) z$  qui soit orthogonale à  $E(\mu)$  : c'est la condition  $\langle z, z' \rangle = 0$ .

De plus  $(K - \mu I)|_{E(\mu)^\perp}$  est bijectif et bicontinu ; Nous avons donc la continuité de  $\psi \rightarrow z'(\phi) \cdot \psi$ .

On montrera plus loin que  $z'(\phi) \cdot \psi$  est la différentielle de  $\phi \rightarrow z(\phi)$  en majorant :

$$\|z(\phi + \psi) - z(\phi) - z'(\phi) \cdot \psi\|_V$$

### 3. Différentiabilité de $\phi \rightarrow \mu(\phi)$

Posons :

$$\delta^2 \mu = \mu(\phi + \psi) - \mu(\phi) - \mu'(\phi) \cdot \psi \equiv \delta \mu - \mu'(\phi) \cdot \psi$$

$$\delta^2 K = K(\phi + \psi) - K(\phi) - K'(\phi) \cdot \psi \equiv \delta K - K'(\phi) \cdot \psi$$

$$\delta z = z(\phi + \psi) - z(\phi)$$

Développons  $K(\phi + \psi) z(\phi + \psi) = \mu(\phi + \psi) z(\phi + \psi)$  ; en utilisant  $Kz - \mu z = 0$  il vient :

$$K \delta z + \delta K (z + \delta z) = \mu \delta z + \delta \mu z + \delta \mu \delta z$$

Prenons le produit scalaire par  $z$ , utilisons le caractère autoadjoint de  $K$ , nous obtenons :

$$\delta^2 \mu = \langle \delta K \delta z, z \rangle + \langle \delta^2 K z, z \rangle - \langle \delta \mu \delta z, z \rangle$$

avec le corollaire 4.2 le théorème 4.13 et l'hypothèse de différentiabilité de  $K$  on obtient :

$$|\delta^2 \mu| \leq \|\psi\| \epsilon(\psi) \text{ avec } \lim_{\psi \rightarrow 0} \epsilon(\psi) = 0$$

ce qui montre que  $\mu'$  est la Fréchet différentielle de  $\phi \rightarrow \mu(\phi)$ .

Remarque : Si  $\delta^2 K$  est d'ordre 2 en  $\|\psi\|$ , il en est de même pour  $\delta^2 \mu$ .

4. Différentialité de  $\phi \rightarrow z(\phi)$ .

Décomposons  $\delta^2 z$  avec le vecteur propre  $z$  :

$$(4.14) \quad \delta^2 z = (z, \delta^2 z)z + \delta^2 z^\perp \quad \text{avec} \quad (\delta^2 z^\perp, z) = 0$$

(4.15) donc :

$$||\delta^2 z||^2 = |<z, \delta^2 z>|^2 + ||\delta^2 z^\perp||^2$$

$$\text{puisque : } ||z|| = ||z + \delta z|| = 1$$

$$2 <z, \delta z> + ||\delta z||^2 = 0 \quad \text{et} \quad <z, z'> = 0$$

$$\text{donc } <z, \delta^2 z> = <z, \delta z> = -\frac{1}{2} ||\delta z||^2 \leq 0$$

et

$$2 <z, \delta^2 z> + ||z'||^2 + 2 <z', \delta^2 z> + ||\delta^2 z||^2 = 0$$

ou

$$2 <z, \delta^2 z> + ||z'||^2 + 2 <z', \delta^2 z^\perp> + ||\delta^2 z||^2 = 0$$

d'où avec (4.15)

$$2 <z, \delta^2 z> + |<z, \delta^2 z>|^2 + ||z'||^2 + 2 <z', \delta^2 z^\perp> + ||\delta^2 z^\perp||^2 = 0$$

et donc comme  $\delta^2 z \rightarrow 0$  et  $<z, \delta^2 z> \leq 0$

$$(4.16) \quad - <z, \delta^2 z> \leq ||z'||^2 + 2 <z', \delta^2 z^\perp> + ||\delta^2 z^\perp||^2$$

développons (4.13) et utilisons (4.12), nous obtenons :

$$K\delta^2 z - \mu \delta^2 z = -\delta^2 Kz - \delta K\delta z + \delta^2 \mu z + \delta \mu \delta z$$

et donc :

$$\begin{aligned} <(K-\mu) \delta^2 z, \delta^2 z> &= - <\delta^2 Kz, \delta^2 z> - <\delta K\delta z, \delta^2 z> + \delta^2 \mu <z, \delta^2 z> \\ &\quad + \delta \mu <\delta z, \delta^2 z> \end{aligned}$$

avec la décomposition 4.14 nous obtenons :

$$<(K - \mu) \delta^2 z, \delta^2 z> = <(K-\mu) \delta^2 z^\perp, \delta^2 z^\perp>$$

$$<\delta^2 Kz, \delta^2 z> = <z, \delta^2 z> <\delta^2 Kz, z> + <\delta^2 Kz, \delta^2 z^\perp>$$

$$<\delta K\delta z, \delta^2 z> = <z, \delta^2 z> <\delta K\delta z, z> + <\delta K\delta z, \delta^2 z^\perp>$$

$$\delta \mu <\delta z, \delta^2 z> = \delta \mu <z, \delta^2 z> <\delta z, z> + \delta \mu <\delta z, \delta^2 z^\perp>$$

On a donc :

$$\langle (K-\mu) \delta^2 z^\perp, \delta^2 z^\perp \rangle \leq ||\psi|| e(\psi) (||\delta^2 z^\perp|| + |\langle z, \delta^2 z \rangle|)$$

avec  $e(\psi) \rightarrow 0$  quand  $\psi \rightarrow 0$ ;

et donc avec (4.16)

$$\langle (K-\mu) \delta^2 z^\perp, \delta^2 z^\perp \rangle \leq ||\psi|| e(\psi) ||\delta^2 z^\perp||$$

d'où avec la le lemme (4.11) :

$$||\delta^2 z^\perp|| \leq ||\psi|| e(\psi) \text{ avec } e(\psi) \rightarrow 0 \text{ quand } \psi \rightarrow 0 . \quad \square$$

## 5. LE PROBLEME ABSTRAIT : REGULARITE DES ELEMENTS PROPRES DU PROBLEME :

$$A(\phi) y(\phi) = \lambda(\phi) B(\phi) y(\phi)$$

Revenons maintenant au problème posé dans le paragraphe 2.2. :  
étude des  $\lambda(\phi) \in \mathbb{R}$ ,  $y(\phi) \in V$  tels que :

$$(5.1) \quad \forall \bar{y} \in V \quad a(\phi; y(\phi), \bar{y}) = \lambda(\phi) b(\phi; y(\phi), \bar{y})$$

$a$  et  $b$  satisfaisant les hypothèses du paragraphe 2.2. Nous avons vu (proposition 2.2.) que  $\lambda(\phi)$  et  $y(\phi)$  sont solutions de cette équations si et seulement si :

$$\begin{cases} \mu(\phi) = \frac{1}{\lambda(\phi)} \\ z(\phi) = S(\phi) y(\phi) \end{cases} \quad \text{vérifie} \quad K(\phi) z(\phi) = \mu(\phi) z(\phi)$$

Par ailleurs, nous avons vu dans le § 3, que sous les hypothèses (H1a), (H2a), (H1b), (H2b) l'opérateur  $K$  est Fréchet différentiable. Sous ces hypothèses, en utilisant le § 4, nous pouvons démontrer que la plus petite valeur propre positive (resp. la plus grande valeur propre négative) de l'équation (5.1) est régulièrement localement convexe (resp. concave) et calculer sa dérivée directionnelle. Montrons d'abord un lemme préliminaire, puis ce résultat.

**LEMME 5.1** : Soit  $\mu$  une valeur propre non nulle de  $K(\phi)$  et  $z$  un vecteur propre associé. Si on pose :

$$y = S^{-1} z, \quad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

alors :

$$(5.2) \quad \langle K' z, z \rangle = - \frac{1}{\lambda} [a'(y, y) - \lambda b'(y, y)]$$

où on a noté :

$K'$  pour  $K'(\phi)\psi$

$a'(y, y)$  pour  $a'(\phi; y, y) \cdot \psi$

$b'(y, y)$  pour  $b'(\phi; y, y) \cdot \psi$

Démonstration :

Rappelons que :

$$b(\phi ; y, y) = \langle B(\phi).y, y \rangle$$

$$a(\phi ; y, y) = \langle A(\phi) y, y \rangle$$

$$K(\phi) = S^{-1}(\phi) B(\phi) S^{-1}(\phi)$$

$$\text{avec } [S(\phi)]^2 = A(\phi)$$

On a vu (Prop. III. 3.1) que l'application  $\phi \rightarrow K(\phi)$  est différentiable, et que :

$$K' = - S^{-1} S' S^{-1} B S^{-1} + S^{-1} B' S^{-1} - S^{-1} B S^{-1} S' S^{-1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle K'z, z \rangle &= - \langle S^{-1} S' S^{-1} B S^{-1} z, z \rangle - \langle S^{-1} B S^{-1} S' S^{-1} z, z \rangle \\ &\quad + \langle S^{-1} B' S^{-1} z, z \rangle \end{aligned}$$

Or  $S^{-1}$  est autoadjoint et  $S^{-1}z = y$ . Donc :

$$\begin{aligned} \langle K'z, z \rangle &= - \langle S' S^{-1} B y, y \rangle - \langle B S^{-1} S' y, y \rangle \\ &\quad + \langle B' y, y \rangle \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que :

$$Kz = \mu z \quad \text{ou encore} \quad Ay = \lambda By$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle K'z, z \rangle &= - \frac{1}{\lambda} [\langle S' S^{-1} Ay, y \rangle + \langle S^{-1} S' y, Ay \rangle] \\ &\quad + b'(y, y) \end{aligned}$$

Nous avons :  $b(\bar{y}, \bar{y}) = \frac{1}{\lambda_1^-} a(\bar{y}, \bar{y}) < 0$ .

Posons  $\bar{y} = \sqrt{\lambda_1^-} y$  nous avons :  
 $b(\bar{y}, \bar{y}) = -1$

On obtient alors après calculs :

$$(\lambda_1^-)' = - \frac{(\mu_1^-)'}{\mu^2} = - \lambda^2 (\mu_1^-)'$$

$$= - \inf \{ a'(y, y) - \lambda_1^- b'(y, y) / Ay = \lambda_1^- By, b(y, y) = 1 \}$$

fonction qui est convexe en  $\psi$ .  $\square$

**COROLLAIRE 5.4.** Sous les hypothèses du théorème 5.2.

Toute valeur propre simple  $\phi \rightarrow \lambda(\phi)$  est Fréchet différentiable;

si  $\phi \rightarrow y(\phi) \in E_{\text{nor}}(\lambda(\phi))$  est un représentant continu, il est aussi Fréchet différentiable. De plus on a :

$$(5.5) : \lambda'(\phi) \cdot \psi = \frac{a'(\phi; y, y) \cdot \bar{\psi} - \lambda b'(\phi', y, y) \cdot \psi}{b(\phi; y, y)}$$

$y'(\phi) \cdot \psi$  est l'unique solution de

$$(5.6) \forall \underline{y} \in V \quad a(y', \underline{y}) - \lambda b(y', \underline{y}) = - [a'(y, \underline{y}) - \lambda b'(y, \underline{y}) - (\lambda'(\phi) \psi) b(y, \underline{y})]$$

avec  $(y', y) = 0$

### Démonstration

La différentialité de  $\lambda$  et  $y$  provient des relations

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \quad y = Sz$$

et de la différentialité de  $\mu$  et  $z$  établie dans le théorème 4.14.

On peut alors obtenir les formules indiquées par dérivation de la relation  $a(\phi; y, \underline{y}) = \lambda b(\phi; y, \underline{y})$

$$\begin{aligned} & a'(\phi; y, \underline{y}) \cdot \psi - \lambda b'(\phi; y, \underline{y}) \cdot \psi \\ &= - a(\phi; y', \underline{y}) + \lambda b(\phi; y', \underline{y}) + \lambda'(\phi) \cdot \psi b(\phi; y, \underline{y}) \end{aligned}$$

En faisant  $\underline{y}=y$  on obtient (5.5), cette même équation est identique à (5.6); l'orthogonalité du second membre avec  $y$  n'est autre que (5.5) et l'existence, unicité de la solution est donnée par l'alternative de Fredholm.  $\square$

Remarque 5.1 : Si l'on a normalisé  $y$  par  $b(\phi; y, y) = 1$

on a par dérivation  $2b(\phi; y', y) + b'(\phi; y, y) \cdot \psi = 0$

au lieu de  $(y', y) = 0$ ; toutefois

$Y' = y' + \alpha y$  avec  $\alpha = \frac{(y', y)}{\|y\|^2}$  vérifie  $(Y', y) = 0$  et est encore solution de (5.6).

## 6 APPLICATION A LA CHARGE CRITIQUE DE FLAMBEMENT D'UNE POUTRE :

Revenons à ce problème qui a été introduit dans § 2.1. Rappelons qu'on a défini :

$$V = H_0^1 (]0,1[) \times H^2 (]0,1[).$$

a et b sont deux formes bilinéaires continues symétriques définies sur V, a dépendant d'un paramètre h représentant l'aire de la section de la poutre. On a :

$$a(h;u,v) = E\alpha \int_0^1 h^2(x) u''(x) v''(x) dx$$

$$b(u,v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx$$

a est coercitive sur V. Dans cet exemple b est positive. Donc les valeurs propres du problème :

$$(6.1) \quad \forall \bar{y} \in V, a(h;y,\bar{y}) = \lambda b(y,\bar{y}) \text{ sont positives.}$$

On se propose ici d'étudier la différentiabilité de la valeur critique de flambement de la poutre par rapport au paramètre h. Cette valeur critique de flambement est la plus petite valeur propre  $\lambda_1^+$  du problème (6.1).

Le paramètre h est une fonction qu'on choisit dans  $L^\infty (]0,1[)$ .

Nous avons vu dans le § 2 que l'opérateur B linéaire dans V associé à la forme b est compact. Donc d'après ce qui précède, si on peut montrer que les hypothèses (H1a), (H2a), (H1b), (H2b) sont satisfaites, on en déduira que  $\lambda_1^+$  est régulièrement localement concave si elle est multiple, et Fréchet différentiable si elle est simple. De plus (théorème 5.2) :

$$\{ \lambda_1^+ \}'(h,k) = \inf a'(y,y) - \lambda_1^+ b'(y,y) / Ay = \lambda_1^+ By, b(y,y) = 1 \}$$

Les hypothèses (H1b), (H2b) sont trivialement vérifiées car b ne dépend pas de h.

**PROPOSITION 6.1 :** La forme

$a : h, u, v \mapsto a(h;u,v) : L^\infty (]0,1[ \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable par rapport à h pour tout u, v  $\in V$  :

$$a'(h;u,v).k = 2 E \alpha \int_0^1 h(x)k(x) u''(x) v''(x) dx.$$

De plus (H1a) et (H2a) sont satisfaites.



Démonstration :

L'application  $h \rightarrow h^2: L^\infty(]0,1[) \rightarrow L^\infty(]0,1[)$   
est évidemment Fréchet différentiable, et :

$$(h+k)^2 = h^2 + 2hk + ||k|| \epsilon(k)$$

où  $\epsilon(k) \in L^\infty(]0,1[)$ ,  $||\epsilon(k)|| \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow 0$ .

Le résultat en découle immédiatement.  $\square$

On a donc :

THEOREME 6.2 :

1. La plus petite valeur propre  $\lambda_1^+(h)$  du problème 6.1 est  
régulièrement localement concave, et :

$$(\lambda_1^+)'(h,k) = \text{Inf} \left\{ 2E \alpha \int_0^1 h(x) k(x) [y''(x)]^2 dx / y \in Y \right\}$$

où  $Y = \left\{ y \in V / E \alpha \int_0^1 h^2(x) y''(x) z''(x) dx = \lambda_1^+ \int_0^1 y'(x) z'(x) dx, \right.$   
 $\left. \forall z \in V; \int_0^1 [y'(x)]^2 dx = 1 \right\}$

2. Si cette valeur propre est simple elle est Fréchet  
différentiable et :

$$(\lambda_1^+)'(h).k = 2E \alpha \int_0^1 h(x) k(x) [y''(x)]^2 dx$$

où  $y \in V$  est l'une quelconque des 2 solutions de :

$$\begin{cases} \forall z \in V & E \alpha \int_0^1 h^2(x) y''(x) z''(x) dx = \lambda_1^+ \int_0^1 y'(x) z'(x) dx \\ & \int_0^1 [y'(x)]^2 dx = 1 \end{cases}$$

La fonction propre est aussi Fréchet différentiable, c'est la  
• solution de :

$$\forall z \in V \quad E \alpha \int_0^1 h^2 y' \cdots z'' dx$$

$$= - 2 E \alpha \int_0^1 h k y'' z z'' - \lambda' \int_0^1 y' z' dx$$

$$\text{avec } \int_0^1 y' y' x = 0$$

## Conclusion

Nous avons présenté une méthode de démonstration de la différentiabilité des valeurs propres éventuellement multiples, définies par des formes bilinéaires.

Cette démonstration est autonome, c'est à dire qu'elle ne repose sur aucun gros résultat extérieur de théorie des perturbations. Ce n'était pas le cas dans Haug-Rousselet (1980) [7]. Cette méthode est adaptée au cadre variationnnel tel qu'on le rencontre fréquemment dans les problèmes issus de la mécanique des structures.

Nous avons donné l'application au flambement d'une poutre. On pourrait traiter de la même façon les autres exemples indiqués dans Haug-Rousselet (1980)[7] (vibration de membrane et de plaque).

Dans Chenais-Rousselet (à paraître) (1987) [2], on développe l'exemple plus compliqué de la différentiabilité par rapport à l'épaisseur et à la surface moyenne de la charge critique de flambement d'une arche.

## Bibliographie.

- [1] BREZIS (H) Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson (1983).
- [2] CHENAIS(D.) - ROUSSELET (B.) Dependence of the buckling load of a non shallow arch with respect to the shape of its midcurve, à paraître.
- [3] DIEUDONNE (J.A) Eléments d'analyse. Paris, Gauthiers-Villars (1968), tomes I et II.
- [4] DUNFORD (N.), SCHWARTZ (J.) : Linear operators, tomeII;Interscience Pub. (1963)
- [5] GERMAIN (P.) Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique ; Ellipses (1986).
- [6] GIRSANOV (I.V.) Lectures on Mathematical Theory of extremum problems. Sringer Verlag (1972).
- [7] HAUG (E.J),ROUSSELET (B.) Design sensitivity analysis in structural mechanics II : Eigenvalue variations. J. of struct.mech. (1980), 8, 161 - 186.
- [8] IOFFE (A.D.), TIHOMIROV (V.M.) Theory of extremal problems. North-Holland, (1979).
- [9] JOSEPH (D.D.) Parameter and domain dependence of eigenvalues of elliptic partial differential equations. Arch. of Ration. mech. and anal (1977), 35, 169 - 177.
- [10] KATO (T.) Perturbation theory for linear operators. Sringer-Verlag, (1966).
- [11] LIONS (J.L), MAGENES (E.) Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, (1968) Vol. 1 & 2.
- [12] MASUR (E.F.) Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints. Int.J. Solids Structures, 20, pp 211 - 231, (1984).

- [13] OLHOFF (N), RASMUSSEN (S.H.) : On single and bimodal buckling modes of clamped columns. Int. of solids and structures, 13, 605 - 614, 1977.
- [14] ROUSSELET (B.) : Etude de la régularité des valeurs propres par rapport à des déformations bilipschitziennes du domaine. Comptes rendu de l'académie des sciences, (1976), série I, 283, p. 507.
- [15] ROUSSELET (B.) : Optimal design and eigenvalue problems. Optimization techniques, ed. par Stoer J., Springer-Verlag, (1978), 343 - 352.
- [16] ROUSSELET (B.) : Quelques résultats en optimisation de domaines, thèse d'état, Université de Nice, 1982.
- [17] ROUSSELET (B.) : Shape design sensitivity of a membrane, J.O.T.A., 40, pp.595 - 623, (1983).
- [18] ROUSSELET (B.), HAUG (E.J.) : Design sensitivity analysis in structural mechanics III; effects of shape variations for plate and plane elasticity. J. of struct. mech. (1982).
- [19] RUDIN (W.) : Functional analysis. Tata Mac Graw Hill (1978).

